

allorchè si ha $d = 2a - b^2$; perciò se si prova essere $2a - b^2 > a + b + 0,25$, ne segue non potere la cifra de' decimi essere minore di 5. Ed in vero il prodotto $b(b+1) = b^2 + b$ non può avere un numero di cifre maggiore di $2m$, essendo b di m cifre, e quindi $b^2 + b + 0,25$ risulta al più di $2m$ cifre intere e di due decimali, mentre 'l numero a è formato di $2m + 1$ cifre intere (III°); dunque si ha certamente $a > b^2 + b + 0,25$. Aggiungendo a alle due quantità ineguali, si ottiene $2a > a + b^2 + b + 0,25$; e sottraendo b^2 , si deduce $2a - b^2 > a + b + 0,25$. In questa guisa si capisce, che nell'estensione de' valori di d da $2a - b^2$ a $2a + 2b$, trovata col metodo ordinario la parte intera $a + b$ della radice di P , la cifra de' decimi non può essere inferiore a 5; per lo che trascurando la cifra 5 de' decimi e le seguenti, si deve aggiungere *uno* alla cifra delle unità onde commettere 'l minore errore possibile (Aritm. n. 111), e così la radice intera più approssimata sebbene maggiore della vera è $a + b + 1$, cioè 'l risultamento $b + 1$ del compendio si deve riguardare come più esatto dell' altro b del metodo ordinario.

V.° Dimostrata l'esattezza del compendio consistente nella divisione di R per $2a$ (I°), ci facciamo a discorrere del metodo pratico dello stesso, affinchè si proceda con maggiore sicurezza. Da principio si fa uso del metodo ordinario per trovare le prime $m + 1$ cifre della radice, che formano le cifre significative di a , e si ha 'l solito residuo, che noi chiamiamo *residuo dell'estrazione*; e siccome si devono trovare le altre m cifre di b , così nel dato numero P esistono certamente m periodi di due cifre cioè un numero $2m$ di cifre, che diciamo *resto del numero*; ed egli è chiaro, che le cifre del resto del numero scritte in seguito di quelle del residuo dell'estrazione formano il *residuo totale* R , che deve dividersi per $2a$. Il divisore $2a$ termina con m zeri, e volendo trovare soltanto la par-

te intera del quoto, si possono togliere gli m zeri del divisore e le ultime m cifre del dividendo, come se ambidue si dividessero per 10^m (Aritm. n.º 103 in principio); quindi il dividendo sarà *l' residuo dell' estrazione* colle prime m cifre seguenti del *resto del numero*, essendo il divisore formato dal doppio delle sole $m + 1$ cifre significative di a cioè dal doppio delle $m + 1$ cifre già trovate nella radice. Onde nella pratica si può procedere nella seguente maniera: *dopo di aver trovato $m + 1$ cifre colla regola ordinaria dell' estrazione di radice ed ottenuto il residuo, si forma il divisore costante col doppio della radice trovata, ed allato del residuo si scrive la 1ª cifra seguente del numero dato, come altronde si prescrive per proseguire l' operazione incominciata, il quoto di questa divisione dà la 1ª cifra di b , avvertendo di scrivere lo zero ancorchè in principio, nel caso che questa 1ª divisione parziale non possa effettuarsi, e ciò per non alterare i posti delle ulteriori cifre da ritrovarsi; così di seguito si continuano le divisioni parziali con abbassare una cifra allato del nuovo residuo, fintantochè dopo di avere abbassato successivamente le prime m cifre del resto del numero si determinano tutte le m cifre del quoziente ch' esprime l' valore di b .*

Qui finisce l' operazione del compendio, ma se si vuol fare la prova e confrontarne i risultamenti con quelli del metodo ordinario, allora allato del residuo dell' ultima divisione si devono scrivere le altre m cifre del *resto del numero*, affinchè si formi l' numero $b^2 + d$, com' è chiaro dall' equazione $R - \frac{1}{2} a b = b^2 + d$ (1º). Perlochè sottraendo il quadrato b^2 della parte b già ritrovata col compendio dal numero $b^2 + d$, si ottiene l' ultimo residuo d , appunto come lo darebbe l' metodo ordinario dopo la determinazione della radice $a + b$, salvo l' caso in cui si ha avuto $b + 1$ in vece di b , essendo allora impossibile la sottrazione

di $(b + 1)^2$ dal numero minore $b^2 + d$. Se poi sottraendo b^2 da $b^2 + d$, nulla avanza, si ha $d = 0$; e ciò indica essere 'l numero proposto P un quadrato perfetto, di cui $a + b$ esprime esattamente la radice.

VI.° L' uso del compendio si estende ancora all' approssimazione decimale delle radici degli interi ed alle frazioni decimali: imperciocchè, cercando n decimali nella radice, si procede nel 1.° caso ad estrarre la radice del dato intero seguito da $2n$ zeri; e nel 2.° caso, reso 'l numero de' decimali un multiplice n di 2, si estraе la radice del numero del fratto decimale a guisa d' intero, separando in ambidue i casi n decimali nella radice intera (Alg. n. 115 e 116). Così la cifra delle unità della radice passa a cifra decimale dell' ordine *n*simo; e questa giusta la dimostrazione di sopra deve risultare esatta, o coll' aumento di *uno* nel caso della cifra decimale seguente 5 o più (IV.°).

VII.° Ci facciamo ora a soggiungere alcuni es. che si riferiscono a' vari casi che possono occorrere nella regola del compendio.

Es. 1.° Si cerchi la radice del n. 75372472527187.

Essendo sette le cifre di questa radice, se ne possono trovare quattro col metodo ordinario e tre col compendio per ragione di $2m + 1 = 7$ o sia di $m = 3$. Il metodo ordinario (A) dà le quattro cifre 8739, il residuo dell' estrazione 2351, e 'l resto del numero 527187; quindi giusta la regola del compendio è da dividersi 2351527 per $2 \times 8739 = 17478$, cioè 'l residuo dell' estrazione seguito dalle prime tre cifre del resto del numero pel doppio delle cifre trovate. Questa divisione (B) si effettua con abbassare ad una ad una le tre cifre 5, 2, 7, e così si ottengono le tre cifre 1, 3, 4 del quoto, che sono le ultime tre della radice richiesta, la quale si esprime da 8739134 *ad uno presso*.

Se si vuol confrontare 'l resultamento del compendio con quello del metodo ordinario, da una parte si

di 88 ch' è 7744; ciò che fa segno di aver ottenuto col compendio l'ultima cifra aumentata di *uno*, rispetto a quella che darebbe'l metodo ordinario (V°, in fine). Difatto proseguendo l'estrazione (F), si deduce 087; ma la cifra seguente de' decimi essendo 9, ne segue che 'l resultamento del compendio 088 e più approssimato di 087 (IV°).

(D)

$$\begin{array}{r} \sqrt{1, 28, 84, 24, 76, 05, 42} = 1135087,9 \\ \begin{array}{r} 28 \\ 7 \ 84 \\ 1 \ 15 \ 24 \\ (F) \ 1 \ 99 \ 76 \ 05 \\ \quad 18 \ 15 \ 41 \ 42 \\ \quad \quad 2 \ 26 \ 29 \ 73 \ 00 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2.1 \\ 22.3 \\ 226.5 \\ 22700.8 \\ 227016.7 \\ 2270174.9 \end{array} \right. \end{array}$$

(E)

$$\begin{array}{r} 19976 \\ 18160 \\ \hline 0000542 \\ 7744 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2270 \\ 088 \end{array} \right.$$

Es. 3°. Si cerchi la radice di 2054718241.

Trovate le prime tre cifre 453, si prosegue colla regola del compendio (G), e si ottengono le altre due 29 col residuo 8. Abbassandovi le ultime due cifre 41 del numero, da 841 si deve sottrarre il quadrato di 29 ch'è 841, e si ha 'l residuo *zero*, dunque 45329 è la radice esatta del dato numero.

$$\sqrt{20, 54, 71, 82, 41} = 45329$$

$$\begin{array}{r} 4 \ 54 \\ (G) \ 29 \ 71 \\ \quad 2 \ 62 \ 8 \\ \quad \quad 81 \ 62 \\ \quad \quad \quad 0 \ 08 \ 41 \\ \quad \quad \quad \quad 8 \ 41 \\ \hline 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 8.5 \\ 90.3 \\ 906 \\ \hline 29 \end{array} \right.$$

Es. 4 Si cerchi la radice di 184,956327.

Considerando'l dato numero a guisa d'intero, si separano nella radice tre decimali (Algebra n°. 116). Le prime tre cifre si trovano col metodo ordinario, che dà 135 e'l residuo 270 eguale a 2×135 ; per lo che si deve giusta il compendio dividere 27063 per 270, ciò che dà'l quoto 100 di tre cifre, mentre in effetto se ne cercano due per la radice. In questo caso, proseguendo l'estrazione, si trovano le due cifre 99 col residuo $23526 = d$, ch'è maggiore di $2a - b^2 = 27000 - 9801 = 17199$; perciò'l compendio deve dare $b + 1$ o sia $99 + 1 = 100$ (IV° in principio), di cui la 1ª cifra 1 appartiene all'ultimo posto di quelle già calcolate col metodo ordinario. La radice adunque si esprime dalle due parti $13500 + 100 = 13600$, o per dir meglio da 13,600 avendo riguardo alla frazione decimale, e questa è più approssimata della radice 135,59 del metodo ordinario.

$$\sqrt{1, 84, 95, 63, 27} = 135$$

84	2.3
15 95	26.5
2 70	270
0 00 63	100

Osservazione. Questo caso deve sempre aver luogo, allorchè si ottiene 'l massimo residuo dell'estrazione denotato da $2a$, intendendo per a le sole cifre già trovate della radice; imperciocchè 'l dividendo $2a$ col seguito delle prime m cifre del resto del numero e 'l divisore $2a$ danno 'l quoto uno col seguito di m zeri. E siccome realmente mancano m cifre alla radice in continuazione delle prime $m + 1$, così in simile caso, proseguendo col metodo ordinario, si devono trovare m cifre 9 come valore di b , affinchè coll' aumento di uno mercè 'l compendio avesse origine 'l numero $b + 1$ di $m + 1$ cifre espresso da uno col seguito di m zeri. Si vede adunque essere questo caso compreso nell' altro più generale del compendio, che dà

$b + 1$ in vece di b ; e può soltanto sembrare un imbroglio a chi non ne ha approfondito la teoria. Ecco ciò che si legge al n°. 176 della 1^a edizione delle lezioni elementari di Marie fatta in Firenze 1781 e ristampata in Palermo: *Se avute al solito le prime cifre della radice, il resto si trovi eguale al loro poppio, sarà bene per fuggire ogni imbroglio, determinare un'altra cifra col metodo ordinario, dopo di che si userà il compendio insegnato.*

Es.° 5°. Trovare la radice di 3 con sette decimali.

Avendo determinato le prime cinque cifre 1,7320 e 'l residuo 17600 col metodo ordinario (Algebra n. 115. Es. 1°), se ne trovano tre col compendio, aggiungendo successivamente tre zeri al residuo 17600 dell' estrazione, e dividendo per $2 \times 17320 = 34640$, e queste sono 508. Se si scrivono altri tre zeri allato del residuo 2880, e dal numero 2880000 si sottrae 'l quadrato di 508 ch' è 258064, si ottiene il residuo 2621936 del metodo ordinario.

$$\begin{array}{r}
 17600 \ 0 \\
 280 \ 000 \\
 2 \ 880 \ 000 \\
 258 \ 064 \\
 \hline
 2 \ 621 \ 936
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 34640 \\
 \hline
 508
 \end{array}$$

Dopo di aver trovato la radice 1,7320508 e 'l residuo 2621936 si possono col compendio determinare altre sette cifre, dividendo 2621936 colla successiva aggiunta di sette zeri per $2 \times 17320508 = 34641016$, cioè che dà 0756887; e la radice di 3 si esprime da 1,73205080756887.

$$\begin{array}{r}
 2621936 \ 00 \\
 197064 \ 880 \\
 23859 \ 8000 \\
 3075 \ 19040 \\
 303 \ 909120 \\
 26 \ 7809920
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 34641016 \\
 \hline
 0756887
 \end{array}$$

VIII.° E qui si noti che mercè 'l compendio si può estrarre la radice di qualunque numero dopo di averne trovato col metodo ordinario le prime tre cifre: giacchè da prima si determinano col compendio altre due cifre della radice; e scrivendo allato del residuo le due cifre seguenti del numero, si sottrae 'l quadrato delle due cifre trovate, e si ottiene 'l residuo. Avendo così cinque cifre in radice, il compendio ne dà altre quattro, allato del residuo si scrivono le seguenti quattro cifre del numero, e si sottrae 'l quadrato delle quattro cifre trovate; così di seguito si potranno col compendio avere un numero di cifre eguale al numero delle precedenti diminuito di *uno*. Se poi in qualche caso non si può sottrarre 'l quadrato delle cifre trovate, volendo proseguire l'operazione, si deve diminuire di *uno* l'ultima cifra, e rifare 'l calcolo analogo. Sebbene così facendo non si abbreviano i calcoli, perchè invece delle solite operazioni del metodo ordinario si devono fare quelle necessarie per passare dal residuo della divisione all'altro dell'estrazione.

Trattandosi per es. di $\sqrt{3}$, si trovano col metodo ordinario le prime tre cifre 1,73 e 'l residuo dell'estrazione 71; col 1° compendio le due cifre 20 e 'l residuo 180, che coll'aggiunta di due zeri diviene 18000, da cui si sottrae 'l quadrato 400 di 20, e si ha lo stesso residuo dell'estrazione 17600; col 2° compendio le quattro cifre 5080, il residuo 28800 della divisione; e sottraendo da 28800 0000 il quadrato 25806400 di 5080, il residuo dell'estrazione 262193600; e col 3° compendio si avrebbero di seguito altre otto cifre nella radice; ec.

$$\begin{array}{r}
 1,73 \quad 20 \quad 5080 \quad \dots \\
 \hline
 3 \overline{) 17371} \\
 \underline{1521} \\
 2160 \\
 \underline{18000} \\
 3600 \\
 \underline{36000} \\
 0000 \\
 0000 \\
 \underline{000000} \\
 000000 \\
 \underline{00000000} \\
 00000000 \\
 \underline{0000000000} \\
 0000000000 \\
 \dots
 \end{array}$$

$\sqrt{3} = 1,73$	2.7
200	
1100	34.3
1.° comp. 71 0	
1 8000	346
400	
	20
2.° comp. 1 7600 0	
280 000	34640
2 8800 0000	
2580 6400	5080
1 6219 3600	

IX°. Siamo ora in istato di capire il vizio delle dimostrazioni date sopra tal proposito dagli autori di algebra, e non tenendo conto di Marie che al n°. 176 dell'opera già citata fa nascere il compendio dal noto assioma $(a + b)^2 = a^2 + 2a b + b^2$, ci facciamo da prima a discorrere di La Croix. Questo rispettabile autore dopo di aver fatto un cenno sul compendio ne fa l'applicazione a $\sqrt{32976}$, trovando le prime tre cifre 181 col metodo ordinario e le due seguenti 59 col compendio, ed ottiene $\sqrt{32976} = 181, 59$ *ad un centesimo presso*; poi per provare la legittimità del compendio designa per N il numero proposto, per a la radice del massimo quadrato compreso in N, per b la parte da aggiungere onde avere la radice esatta di N, stabilisce l'equazione $N = a^2 + 2a b + b^2$ cioè $\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2}{2a}$ da cui argomenta che il 1° membro può essere preso come valore di b tutte le volte che $\frac{b^2}{2a}$ è più piccolo dell'unità dell'ultimo posto di b ; quindi enuncia la regola del numero delle cifre di a maggiore del doppio di quello di b , la quale regola suppone a espresso riguardo all'an-

zidetta unità di b ; e conchiude con applicare la dimostrazione all' es. di sopra in cui si ha $a = 18100$
 $2a = 36200$, $b^* = 59^* = 3481$, e $\frac{b^*}{2a} = \frac{3481}{36200}$
 minore di uno, essendo *un centesimo* l'unità di tutti
 questi numeri (V. La Croix. *Éléments d'Algèbre* Paris.
 n. 102).

Senza badare alla condizione apposta ad a che per
 caso conviene all' esempio e non è compatibile colla
 condizione di b , veniamo dicendo che la dimostra-
 zione appoggiata alla formula $N = a^2 + 2ab + b^2$
 vale pel solo caso del numero proposto N quadrato
 perfetto; che in caso diverso dopo di aver trovato a
 $+ b$ esiste un residuo d , e l'equazione si denota da
 $N = (a + b)^2 + d$ cioè da $\frac{N - a^2}{2a} = b + \frac{b^2 + d}{2a}$ cor-
 rispondendo $N - a^2$ al nostro R (I°); e che per far
 uso del compendio nel caso della radice inesatta è
 giocoforza di provare essere $\frac{b^2 + d}{2a}$ e non già $\frac{b^2}{2a}$ una
 frazione propria rispetto a b . Difatto nel caso dell'es.
 essendo $d = 10719$; egli è falso di dire che la di-
 visione del compendio dà esatta la cifra de' centesimi
 per causa della frazione propria $\frac{b^2}{2a} = \frac{3481}{36200}$; ma in
 vece di $\frac{b^2}{2a}$ si deve mettere in conto $\frac{b^2 + d}{2a} =$
 $\frac{3481 + 10719}{36200} = \frac{14200}{36200}$ frazione propria per tutt'altra
 ragione che per quella del numero delle cifre del suo
 numeratore e denominatore, potendo ancora in certi
 casi risultare spuria (II°). In somma la dimostrazione
 di La Croix, che sarebbe stata giusta per la radice
 di $32976 - 1$, $0719 = 32974,9281$ quadrato per-
 fetto, è falsa nel caso dell' esempio, e falsissima ne
 riesce l'applicazione; frattanto questa dimostrazione er-
 ronea è stata ripetuta nelle molteplici edizioni di Pa-
 rigi e nelle traduzioni in italiano.

Lo stesso difetto si trova nell'algebra di Francoeur, che propone 'l compendio come quello che *abbrevia sopra tutto i calcoli di approssimazione*, deducendolo dall'equazione $\frac{N - a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}$ simile a quella di La Croix, di cui inseguito fa l'applicazione alle radici incommensurabili de' numeri 2 e 3 (V. Francoeur, *Cours complet de Mathématiques pures*. Paris. MDCCCLIX, e la 2^a edizione del 1819. n. 134. 3^o).

Garnier, parlando del compendio nel caso delle radici esatte giusta la formula di La Croix, per stabilire la condizione di $\frac{b^2}{2a}$ fratto proprio prescrive dover essere $2n$ il numero delle cifre di a , $n - 1$ di b , ciò ch'è dà per b al più $2n - 2$ cifre e per $2a$ almeno $2n$, in modo che 'l denominatore risulta con due cifre di più del numeratore, essendo $3n - 1$ il numero totale delle cifre della radice. Una sì fatta condizione è al certo eccedente, bastando una sola cifra di più nel denominatore; ma 'l vero gran chio a secco, che prende Garnier, quello si è d'intendere per $2n$ le sole cifre significative di a , com'è chiaro dalla totalità $3n - 1$ delle cifre della radice, di cui le ultime $n - 1$ appartengono a b . Ed in vero la dimostrazione suppone che a debba esprimere la 1^a parte della radice composta dalle cifre trovate col metodo ordinario e dal seguito del conveniente numero di zeri in rimpiazzo de' posti delle cifre di b (1^o); perciò $2a$ è da riputarsi in questo sistema almeno di $2n + n - 1 = 3n - 1$ cifre, e l' eccesso sopra le $2n - 2$ cifre di b^2 risulta $n + 1$ e non già 2. Difatto nell' es. di $N = 151401015558144$ quadrato, che ha la radice di otto cifre, essendo $3n - 1 = 8$ cioè $n = 3$, basta secondo Garnier trovare per mezzo dell' estrazione le sei prime 123045 = a , e 'l resto $N - a^2 = 295308144$ diviso per

2a = 246090 dà le ultime due cifre 12; non è però giusto di dire $a = 123045$, essendo $a = 12304500$.

e la frazione $\frac{b^3}{2a}$ non è $\frac{144}{246090}$ ma sì bene $\frac{144}{24609000}$.

Pare adunque che Garnier non abbia ben colpito 'l segno, esponendo 'l metodo del compendio; e siccome pecca per eccesso di condizioni, perciò sì limitato e ristretto ne risulta l'uso, che non può recare grande agevolamento nei calcoli. (V. Garnier *Éléments d'Algèbre* 1^e section 3^e edit: Paris, 1811 n^o. 155).

Le stesse idee di Garnier si possono leggere in Suzanne, e certamente uno di questi due autori ha dovuto copiare l'altro. (v. Suzanne *De la manière d'étudier les mathématiques*, 1^e partie, 2^e edit. Paris MDCCCX. Note VI. pag. 386).

Seconda parte sopra 'l compendio della radice cuba.

I.^o Dovendosi estrarre la radice cuba del numero intero P, si denota per N il massimo cubo compreso in P e per d il residuo, cioè si suppone $P = N + d$; e chiamando $a + b$ la radice cuba esatta di N, si ha l'equazione $N = (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, che coll'aggiunta di d e la trasposizione di a^3 diviene $N + d - a^3$ o sia $R = 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + d$, e quindi $\frac{R}{3a^2} = b + \frac{3ab^2 + b^3 + d}{3a^2}$. Da questa formula si deduce 'l compendio della radice cuba, che consiste nella semplice divisione del residuo R per $3a^2$ onde trovare la 2^a parte b, essendo già conosciuta la 1^a a per mezzo del metodo ordinarjo; ma si devono da prima stabilire le condizioni, affinchè si abbia $\frac{3ab^2 + b^3 + d}{3a^2}$

fratto proprio, ciò che si verifica nel caso di $3ab^2 + b^3 + d < 3a^2$ o sia di $d < 3a^2 - 3ab^2 - b^3$. Ed essendo $(a+b+1)^3 = (a+b)^3 + 3(a+b)^2 + 3(a+b) + 1$, il massimo valore di d in numeri interi si esprime da $d = 3(a+b)^2 + 3(a+b) = 3a^2 + 6ab + 3b^2$

+ $3a + 3b$; perciò quella frazione per causa del solo termine d può avere 'l numeratore più grande del denominatore, e così risultare spuria.

II.° Se però si suppone $m + 2$ il numero delle cifre cognite di a e m quello delle cifre di b , si dimostra che 'l massimo valore della frazione spuria di sopra indicato da

$$\frac{3ab^2 + b^3 + 3a^2 + 6ab + 3b^2 + 3a + 3b}{3a^2}$$

$$= 1 + \frac{3ab^2 + b^3 + 6ab + 3b^2 + 3a + 3b}{3a^2} \text{ deve corrispondere}$$

ad *uno più un fratto proprio*, ciò che si riduce alla prova di $3a^2 > 3ab^2 + b^3 + 6ab + 3b^2 + 3a + 3b$.

A quest' oggetto si procura da prima di rendere in forma di fattori l' espressione $3ab^2 + b^3 + \text{cc.}$ e si osserva che si ha

$$3ab^2 + b^3 = (3a + b)b^2$$

$$6ab + 3a = 3a(2b + 1)$$

$$2b^2 + b = b(2b + 1)$$

$$b^2 + 2b = b(b + 2)$$

di cui la somma $(3a + b)b^2 + (3a + b)(2b + 1) + b(b + 2) = (3a + b)(b^2 + 2b + 1) + b(b + 2) = (3a + b)(b + 1)^2 + b(b + 2)$ costituisce l' anzidetta espressione; e quindi più facile riesce la prova di $3a^2 > (3a + b)(b + 1)^2 + b(b + 2)$.

Essendo giusta la nostra ipotesi a di $m + 2$ cifre seguite da m zeri cioè di $2m + 2$ cifre, può $3a$ risultare collo stesso numero $2m + 2$ di cifre di a o con una di più cioè con $2m + 3$; e lo stesso numero di cifre di $3a$ conviene a $3a + b$ per ragione degli m zeri finali di $3a$ che vengono rimpiazzati dalle m cifre di b ; quindi fa d' uopo per la dimostrazione di considerare due casi, che si riferiscono al numero delle cifre di $3a + b$.

III.° 1.° Caso sia $2m + 2$ il numero delle cifre di $3a + b$. Posto b di m cifre secondo l' ipotesi, $b + 1$ risulta di m cifre o pure di $m + 1$ nel caso delle m cifre di b tutte 9, essendo allora $b + 1 = 10^m$. Se $b + 1$ ha $m + 1$ cifre o sia se $b + 1 = 10^m$, si ottiene 'l 1.° prodotto $(3a + b)(b + 1)^2 = (3a + b) \times 10^{2m}$ espresso dalle

medesime $2m+2$ cifre di $3a+b$ seguite da $2m$ zeri, che formano in tutto $4m+2$ cifre. Se $b+1$ ha m cifre, quando $(b+1)^2$ ne contiene'l massimo numero $2m$, il prodotto $(3a+b)(b+1)^2$ può egli è vero risultare di $4m+2$ cifre, ma le prime $2m+2$ a sinistra devono comporre un numero minore di $3a+b$; perchè 'l prodotto di $3a+b$ per $(b+1)^2$ di $2m$ cifre è più piccolo dell' altro di $3a+b$ per 10^{2m} di $2m+1$ cifre, e questo ultimo si esprime dal numero $3a+b$ di $2m+2$ cifre col seguito di $2m$ zeri. Si stabilisce adunque in generale, che quante volte 'l prodotto $(3a+b)(b+1)^2$ contiene 'l massimo numero di cifre $4m+2$, deve lo stesso esprimersi o da $3a+b$ con $2m$ zeri o da un numero di $2m+2$ cifre minore di $3a+b$ col seguito di altre $2m$ cifre. Al 1° prodotto $(3a+b)(b+1)^2$ si deve aggiungere 'l 2° $b(b+2)$, ch' è suscettibile di avere al più $2m$ cifre (I^a parte III°); e facilmente ci riesce di determinare 'l numero delle cifre della somma di questi due prodotti, sopponendoli sempre col massimo numero di cifre. Ed in vero se 'l 1° prodotto è formato dalle $2m+2$ cifre di $3a+b$ con $2m$ zeri, aggiungendovi le $2m$ cifre del 2° prodotto, queste occuperanno i posti de' $2m$ zeri, e la somma risulterà collo stesso numero $4m+2$ di cifre del 1° prodotto. Se poi le prime $2m+2$ cifre a sinistra del 1° prodotto un numero compongono minore di $3a+b$, non possono essere le stesse tutte 9; per lo che sommando le $2m$ cifre del 2° colle $2m$ a destra del 1° prodotto, ancorchè esista in fine 'l riporto 1, costante si mantiene 'l numero $2m+2$ delle seguenti, che crescerebbe di uno nel caso della serie di $2m+2$ cifre 9. Dunque si conchiude in generale che 'l massimo numero di cifre della somma de' due prodotti è $4m+2$.

Ora 'l minimo numero di cifre di a^2 è $4m+3$, essendo a di $2m+2$ cifre, e se pure $3a^2$ resta collo stesso numero $4m+3$ di cifre, sempre egli è vero che $3a^2$ deve per lo meno contenere una cifra di più della somma de' due prodotti di sopra che ne può avere $4m+2$;

onde per ragione del numero delle cifre sarà certamente $3a^2 > (3a+b)(b+1)^2 + b(b+2)$. Lo che ec.

Corollario. Non solamente $3a^2$ ma la sua metà è maggiore della somma di quei due prodotti, cioè si ha $\frac{3a^2}{2} > (3a+b)(b+1)^2 + b(b+2)$. Giacchè il numero delle cifre di $3a^2$ può estendersi da $4m+3$ a $4m+4$, e quando ha luogo il caso di $4m+3$, ch'è il minimo numero delle cifre di a^2 , la 1^a cifra a sinistra di $3a^2$ non può essere inferiore a 3. In questa guisa si è certo che $\frac{3a^2}{2}$ non può contenere meno di $4m+3$ cifre; ma la somma $(3a+b)(b+1)^2 + b(b+2)$ ne comprende al più $4m+2$; dunque ec.

IV.° 2° Caso. Sia $2m+3$ il numero delle cifre di $3a+b$. Con un raziocinio analogo a quello del 1° caso si prova che l'1° prodotto $(3a+b)^2 (b+1)^2$ può al più risultare di $4m+3$ cifre, dovendo le prime $2m+3$ comporre un numero eguale o minore di $3a+b$; e che la somma de' due prodotti $(3a+b)(b+1)^2 + b(b+2)$ può contenere al più $4m+3$ cifre.

Intanto in questo caso di $3a+b$ o più semplicemente di $3a$ con $2m+3$ cifre (II°) cioè con una cifra di più di a fa d'uopo che l' prodotto della 1^a cifra a sinistra di a per 3 sia di due cifre, o che tale divenga col riporto degli altri prodotti; quindi l'anzidetta 1^a cifra non può essere minore di 3, essendo l' prodotto di 2 per 3 col massimo riporto 2 eguale al numero 8 di una sola cifra. E nel caso della 1^a cifra 3 non possono seguire altre cifre inferiori a 3, finchè si perviene ad una cifra che sia per lo meno 4; così tolta la 1^a cifra 3, le seguenti $2m+1$ di a formano un numero, di cui il prodotto per 3, che per richiamarlo in appresso diciamo (A), ha $2m+2$ cifre, ch'è appunto la condizione per esistere l' riporto e cangiare in due cifre il prodotto $3 \times 3 = 9$. Ora in simile caso l' quadrato a^2 contiene certamente l' massimo numero $4m+4$ di cifre. Questa proposizione è evi-

dente, quando la 1^a cifra a sinistra di a è per lo meno 4, che dà 'l quadrato 16 di due cifre; perciò ci facciamo a provarla nel caso della 1^a cifra 3. Si consideri a diviso in due parti, la 1^a formata dalla 1^a cifra 3 con $2m+1$ zeri e la 2^a dalle seguenti cifre $2m+1$ di a ; il quadrato della 1^a parte è 9 con $4m+2$ zeri; il prodotto della 1^a per la 2^a parte si esprime da quello (A) di sopra di $2m+2$ cifre col seguito di $2m+1$ zeri, cioè resulta di $4m+3$ cifre, e lo stesso numero per lo meno appartiene al doppio prodotto; dunque la somma de' primi due termini del quadrato di a , ciascuno di $4m+3$ cifre per ragione della cifra 9 del 1^o deve al certo contenere $4m+4$ cifre, o sia a indipendentemente dal suo 3^o termine racchiude $4m+4$ cifre. Premesso ciò, si vede che 'l numero $4m+4$ delle cifre di a denota 'l minor numero possibile delle cifre di $3a$, mentre la somma $(3a+b)(b+1)+b(b+2)$ può averne al più $4m+3$; dunque per ragione del numero delle cifre si avrà $3a > (3a+b)(b+1)+b(b+2)$.

Corollario. In questo 2^o caso come nel 1^o si ha pure $\frac{3a^2}{2} > (3a+b)(b+1)+b(b+2)$: perchè 'l numero delle cifre di $3a$ può estendersi da $4m+4$ a $4m+5$, e quando sono $4m+4$ cioè lo stesso numero delle cifre di a , la 1^a cifra a sinistra di $3a$ non può essere minore di 3; quindi la metà di $3a$ deve avere un numero di cifre non inferiore a $4m+4$ cioè una cifra di più della somma de' due prodotti; dunque ec.

V.^o Si capisce da ciò che la regola del compendio di dividere R per $3a^2$ dà lo stesso valore di b del metodo ordinario di estrazione da $d=0$ sino a $d=3a^2-3ab^2-b^3$ esclusivamente, e $b+1$ da $d=3a^2-3ab^2-b^3$ sino a $d=3a^2+6ab+3b^2+3a+3b$ (1^o); ma nel caso di $b+1$ il metodo ordinario dovrà dare la cifra del posto de' decimi non inferiore a 5, a somiglianza di ciò che si è già dimostrato nel compendio della radice quadrata (1^a parte 4^o). Per provare

questo assunto si consideri la formula $(a+b+\frac{1}{2})^3$
 $= (a+b)^3 + 3(a+b)^2 \times \frac{1}{2} + 3(a+b) \times \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, da
 cui si deduce che l'aumento di $\frac{3(a+b)^2}{2} + \frac{3(a+b)}{4}$
 $+\frac{1}{8}$ nel numero porta l'aumento di $\frac{1}{2}$ nella sua ra-
 dice cuba; e siccome 'l compendio dà $b+1$ da d
 $= 3a^3 - 3ab^2$ in poi, così deve dimostrarsi $3a^3 - 3ab^2$
 $- b^3 > \frac{3(a+b)^2}{2} + \frac{3(a+b)}{4} + \frac{1}{8}$ cioè $3a^3 - 3ab^2 - b^3 >$
 $\frac{3a^3 + 6ab + 3b^3}{2} + \frac{3a + 3b}{4} + \frac{1}{8}$. L'ineguaglianza de' corol-
 lari del 1° e 2° caso, che ha luogo per ragione del
 numero delle cifre de'gl' interi, ci porta a stabilire
 quest'altra $\frac{3a^3}{2} > (3a+b)(b+1)^2 + b(b+2) + \frac{1}{8}$; ed
 aggiungendo $3a^3$ a' due membri, si ha $\frac{3a^3}{2} + \frac{3a^3}{2}$ o sia
 $3a^3 > \frac{3a^3}{2} + 3ab^2 + b^3 + 6ab + 3b^2 + 3a + 3b + \frac{1}{8}$; e
 trasponendo $3ab^2 + b^3$, si ottiene in fine $3a^3 - 3ab^2$
 $- b^3 > \frac{3a^3}{2} + 6ab + 3b^2 + 3a + 3b + \frac{1}{8}$; ma egli
 è evidente che quest' ultima espressione è mag-
 giore di $\frac{3a^3 + 6ab + 3b^3}{2} + \frac{3a + 3b}{4} + \frac{1}{8}$, dunque *a fortiori*
 sarà $3a^3 - 3ab^2 - b^3 > \frac{3a^3 + 6ab + 3b^3}{2} + \frac{3a + 3b}{4} + \frac{1}{8}$, e
 quindi la radice $a+b+1$ sebbene maggiore della vera
 è più approssimata della radice $a+b$ del metodo or-
 dinario (aritm. n.° III).

VI.° Passando ora alla pratica del compendio, che
 consiste nella divisione di R per $3a^3$, veniamo di-
 cendo che dopo di avere trovato per mezzo del me-
 todo ordinario le prime $m+2$ cifre della radice cuba
 formanti le cifre significative di a si deve allato del

residuo dell'estrazione scrivere *l resto del numero* di m periodi di tre cifre cioè di $3m$ cifre, affinchè si componga *l residuo totale* R da dividersi per $3a^3$. Siccome *l divisore* $3a^3$ termina con $2m$ zeri, così possono questi togliersi e non considerarsi le ultime $2m$ cifre del dividendo R , il che importa la loro divisione simultanea per 10^m ; quindi il dividendo si forma dal *residuo dell'estrazione* seguito dalla 1^a coppia di m cifre del *resto del numero*, e *l divisore* dal triplo del quadrato delle $m+2$ cifre trovate. Si può adunque nella pratica seguire *l seguente metodo: trovate colla regola ordinaria di estrarre la radice cuba le prime $m+2$ cifre e l residuo, si stabilisce l divisore costante espresso dal triplo del quadrato della radice già determinata, ed allato del residuo si scrive la 1^a cifra del numero, come si dovrebbe altronde praticare giusta la regola ordinaria; il quoto di questa divisione dà la 1^a cifra di b , e si scrive lo zero nel caso che non possa aver luogo. Così di seguito si abbassa sempre una cifra allato di ogni nuovo residuo per continuare le divisioni, finchè si smaltiscono le prime m cifre del resto del numero e si determinano le m cifre del quoto corrispondente al valore di b o di $b+1$. Che se *l residuo dell'estrazione* è eguale al divisore $3a^3$, si ottiene *l quoto* 10^m di $m+1$ cifre, e la cifra significativa 1 si deve aggiungere all'ultima di quelle già ottenute col metodo ordinario.*

VII.° L' operazione del compendio è già finita, ma se vuol farsene la prova per compararla con quella del metodo ordinario, si devono allato del residuo dell' ultima divisione scrivere la 2^a coppia di m cifre del *resto del numero* per sottrarre le cifre significative del termine $3ab^3$, che termina con m zeri, ed abbassando la 3^a coppia di m cifre si sottrae b^3 ; il residuo di questa sottrazione esprime *l valore di d* che avrebbe dato *l metodo ordinario*, come si fa chiaro dall'equazione $R - 3a^3b - 3ab^3 - b^3 = d(I.^o)$, salvo *l*

caso di $b+1$ in vece di b , in cui la sottrazione riesce impossibile. Anzi le due sottrazioni si possono insieme effettuare, quando si calcolano a parte i termini $3ab^m$ e b^{m+1} , e se ne fa la somma, scrivendo b^{m+1} con m cifre a dritta in fuori sotto di $3ab^m$; giacchè allora si possono abbassare allato dal residuo dell'ultima divisione tutte le $2m$ cifre del *reso del nuro*, e poi si sottrae la somma $3ab^m + b^{m+1}$ per ottenere d .

VIII.° L'uso del compendio si estende ancora alle radici cube de' fratti decimali ed all'approssimazione di quelle dagl'interi, non altrimenti che l'compendio della radice quadrata (I^a parte VI^o); e noi ne facciamo l'applicazione alla ricerca della radice cuba di 7,9507. Volendo trovare sei cifre nella radice, si opera sopra il numero 7 950 700 000 000 000, separando cinque decimali nella sua radice; e per ragione del numero totale delle cifre $2m+2=6$ cioè di $m=2$, se ne determinano quattro col metodo ordinario e due col compendio. Trovate adunque le prime quattro cifre 1995 e l'residuo dell'estrazione 10550125, si formaildivisore $3 \times 1995^2 = 11940075$; si abbassa la 1^a cifra 0 del resto del numero, e la divisione di 105501250 dà la 1^a cifra 8 del quoto e l'residuo 9980650; si abbassa la 2^a cifra 0, e la divisione di 99806500 dà la 2^a cifra 8; così le due parti delle radice rispetto all'intero sono $a=199500$, $b=88$, e pel decimale proposto $a=1,995$ e $b=0,00088$ che costituiscono l'intera radice 1,99588.

L'operazione del compendio per determinare le due cifre 88 è assai breve: ma per farne la prova si abbassano due zeri, e dal numero 428590000 si sottrae $3 \times 88^2 \times 1995 = 46347840$; si abbassano gli altri due zeri, e da 38224216000 si sottrae $88^3 = 681472$, che dà lo stesso residuo $d=38223534528$ del metodo ordinario. O pure si abbassano tutti e quattro gli zeri allato del residuo (A) 4285900 della divisione, e da 42859000000 si sottrae la somma

4635465472 de' due termini scritti come al segno (B), ciò che somministra lo stesso valore di d .

$$\sqrt[3]{7,950,700,000,000,000} = 199588$$

Comp.°	10	550	125	0	
		998	065	00	$\left\{ \begin{array}{l} 11940075 \\ \hline 88 \end{array} \right.$
		42	839	000 0	
		4	634	784 0	
		38 224 216 000			
				681 472	
		38 223 534 528			
(A)		42	859	000 000	
		4	635	465 472	
		38 224 216 900			
(B)		46347840			
		681472			
		4635465472			

Avendo già sei cifre in radice, si può col compendio procedere alla ricerca di altre quattro cifre, non altrimenti di quello che si è detto per la radice quadrata (1ª parte VIII.º); sebbene non si abbia in ciò il vantaggio del compendio, essendo necessari i calcoli sopra eseguiti per giungere dal residuo della divisione all'altro dell'estrazione, i quali calcoli rimpiazzano quelli del metodo ordinario.

IX.º Venendo in fine alla parte che riguarda le dimostrazioni degli autori, nelle citate lezioni di Marie al n. 179 si dice in modo assai vago che questo compendio nasce dall'assioma $(a+b)^3 = a^3 + ec$; La Croix e Francoeur si tacciono; ma negli elementi di Garnier

al n. 155 dopo la sposizione del oempendio della radice quadrata si legge ciò che segue: *Sia N il cubo di un nuro $a+b$: si avrà $\frac{N-a^3}{3a^2} = b + \frac{b^1}{a} + \frac{b^3}{3a^2}$. Designiamo sempre per $2n$ il numero delle cifre di a e per $n-1$ quello di b : il quadrato b^2 avrà al più $2n-2$ cifre; per conseguente $\frac{b^2}{a}$ sarà una frazione propria. Altronde $\frac{b^3}{3a^2}$ sarà una frazione più piccola di $\frac{b^2}{a}$, perchè si ha $\frac{b^3}{3a^2} = \frac{b^2}{a} \times \frac{b}{3a}$; si avrà dunque $\frac{b^3}{a} < 1$ e $\frac{b^3}{3a^2} < 1$, donde si deduce $\frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2} < 2$. Segue da ciò che prendendo $\frac{N-a^3}{3a^2}$ per valore di b , non si può commettere in più un errore di due unità sopra l'ultima cifra a dritta di b . Questo metodo può dunque essere impiegato con vantaggio, allorchè l'ultima parte della radice deve racchiudere dei decimali. Questa pretesa dimostrazione vale pel caso delle radici cube esatte, e niente si definisce per quello delle incommensurabili, ch'è il più frequente e che sembra di volere indicare l'Autore coll'ultima proposizione. Lasciando però star questo, si rassicuri pure il sig. Garnier circa l'errore minore di 2, che il suo metodo non solo non porta alcun errore in numeri interi, ma pecca per eccesso nello stabilire la condizione onde potere la quantità $\frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{3a^2} = \frac{3ab^2 + b^3}{3a^2} = \frac{(3a+b)b^2}{3a^2}$ risultare un fratto proprio propriissimo. Imperciocchè dovendosi per $2n$ intendere il numero delle cifre significative di a , ed essendo b di $n-1$ cifre, sarà al certo a di $3n-1$ cifre (I.^a parte, IX^o). Se si suppone $3a+b$ col massimo numero $3n$ di cifre, potendoue al più b^2 contenere $2n-2$, il massimo numero di*

cifre del prodotto $(3a+b)b^2$ si esprimerà da $3n+2n-2=5n-2$; mentre 'l quadrato a^2 , che deve in questo caso risultare col massimo numero di cifre (IV°), ne racchiuderà $6n-2$, che per lo meno esprime 'l numero delle cifre di $3a$; dunque l' eccesso del numero delle cifre del denominatore sopra quello del numeratore sarà per lo meno $6n-2-(5n-2)=n$. Nè questo minimo eccesso varia nel caso di $3a+b$ con $3n-1$ cifre; giacchè allora $(3a+b)b^2$ ne può al più contenere $3n-1+2n-2=5n-3$, e 'l minor numero possibile di cifre di a^2 e di $3a^2$ corrisponde a $6n-3$, che dà lo stesso eccesso $6n-3-(5n-3)=n$. E siccome basta l' eccesso di una sola cifra nel denominatore per essere proprio 'l fratto, così giusta 'l metodo di Garnier il denominatore contiene per lo meno $n-1$ cifre di più per assicurare l' anzidetta condizione.

Lo stesso metodo di Garnier si può leggere nella nota VII pag. 391 dell' opera citata di Suzanne, non altrimenti di ciò che abbiamo osservato in riguardo al compendio della radice quadrata.

Questi sbagli ci devono avvertire della necessità di rendere sempre un conto esatto a noi stessi delle proprie idee onde evitare la falsità della loro combinazione, e di quelle degli autori per non bere grosso qualche volta; ma non pretendiamo per questo di detrarre al merito di tanti distinti autori di algebra, trattandosi appunto di una bagattella, che non ha fissato forse a sufficienza la loro attenzione, sebbene per bagattella che sia non si debba trascurare in fatto di scienze esatte.

ERRORI

CORREZIONI

pag. 4 l. 15 $N = (a+b)^2 + 2ab + b^2$

ivi l. 17 $R + 2ab + d$

ivi l. 19 $\frac{b+d}{2a}$

5 l. 1 $2(a+b)+1$

9 l. 21 del n. 7537 ec.

10 l. 8 $\sqrt{75, 37}$, ec.

13 l. 7 *poppio*

17 l. 4 $\frac{N-a^2}{2a}$

ivi l. 16 ciò che dà per b

ivi l. 34 trovare

18 l. 23 $\frac{R}{3a^2}$

21 l. 5 $\frac{a^2}{2}$

ivi l. 15 $(3a+b)^2 (b+1)^2$

22 l. 18 $3(a+b)(b+1)^2$

23 l. 6 $= 3a^2 - 3ab^2$ in poi

ivi l. 18 $\frac{3a^2 + 6ab + 3b^2}{2}$

25 l. 7 del *reso del nuro*

27 l. 3 $b + \frac{b^2}{a}$

ivi l. 7 $\frac{b^3}{3a^2}$

28 l. 5 $3a^2$

$N = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$R = 2ab + b^2 + d$

$\frac{b^2+d}{2a}$

$2(a+b)+1$

del n. 7637 ec.

$\sqrt{76, 37}$, ec.

doppio

$\frac{N-a^2}{2a}$

ciò che dà per b

trovare

$\frac{R}{3a^2}$

$\frac{a^2}{2}$

$\frac{3a^2}{2}$

$(3a+b)(b+1)^2$

$3(a+b)(b+1)^2$

$3a^2 - 3ab^2 - b^3$ in poi

$\frac{3a^2 + 6ab + 3b^2}{2}$

del *resto del numero*

$b + \frac{b^2}{a}$

$\frac{b^3}{3a^2}$

$3a^2$

153505

